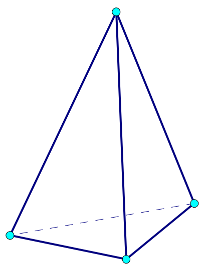
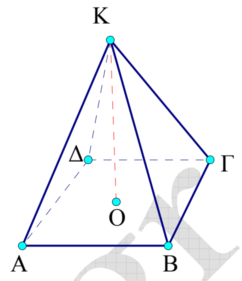
4.4 Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πυραμίδα





Ονομάζεται ένα στερεό του οποίου μία έδρα είναι ένα οποιοδήποτε πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.
Δύο πυραμίδες φαίνονται δίπλα .
Το πολύγωνο ΑΒΓΔ λέγεται **βάση** της πυραμίδας.
Τα τρίγωνα ΚΑΒ , ΚΒΓ , ΚΓΔ , ΚΔΑ λέγονται **παράπλευρες έδρες** και η επιφάνεια που ορίζουν λέγεται παράπλευρη επιφάνεια.
Το σημείο Κ το λέμε **κορυφή** της πυραμίδας.
Το κάθετο τμήμα ΚΟ που φέρνουμε από την κορυφή στη βάση της πυραμίδας το λέμε **ύψος** της πυραμίδας.
Μία πυραμίδα την ονομάζουμε ανάλογα με την μορφή του πολυγώνου της βάσης της
Στο παραπάνω σχήμα η πρώτη είναι μία **τριγωνική** πυραμίδα ενώ η δεύτερη είναι μία **τετραπλευρική** πυραμίδα.
Στην τριγωνική πυραμίδα οποιαδήποτε έδρα της μπορεί να θεωρηθεί σαν βάση γι' αυτό την τριγωνική πυραμίδα την λέμε και **τετράεδρο**.

2.

Κανονική πυραμίδα : Η πυραμίδα που η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και η προβολή της κορυφής στη βάση είναι το κέντρο του πολυγώνου της βάσης.

3.

Ιδιότητα της κανονικής πυραμίδας : Όλες οι παράπλευρες έδρες είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

4.

Απόστημα κανονικής πυραμίδας : Ονομάζεται το ύψος μιας οποιασδήποτε παράπλευρης έδρας

5.

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πυραμίδας

Είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων της παράπλευρης επιφάνειας.

6.

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κανονικής πυραμίδας

$E_{\text{παράπλευρης}} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα)

7.

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας πυραμίδας : $E_{\text{ολικό}} = E_{\text{παράπλευρης}} + E_{\text{βάσης}}$

8.

Όγκος πυραμίδας : Όγκος = $\frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Στο τετράεδρο όλες οι έδρες είναι τρίγωνα.
β) Η πενταγωνική πυραμίδα έχει πέντε έδρες.
γ) Η κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρες έδρες ισόπλευρα τρίγωνα.
δ) Δεν υπάρχει κανονική πυραμίδα με παράπλευρες έδρες σκαληνά τρίγωνα.
ε) Δεν υπάρχει κανονική πυραμίδα με βάση εικοσάγωνο.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 1-2-3

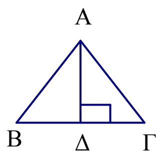
α) Σωστό, αφού στο τετράεδρο όλες οι έδρες είναι τρίγωνα.
β) Λάθος, έχει πέντε παράπλευρες και την βάση δηλαδή έξη.
γ) Λάθος, έχει παράπλευρες έδρες ισοσκελή τρίγωνα.
δ) Σωστό, αφού στην κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ισοσκελή τρίγωνα.
ε) Λάθος, αφού υπάρχει κανονικό εικοσάγωνο.

2.

Κανονική πενταγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8 m και απόστημα 6 m.
Να βρείτε **α)** την παράπλευρη ακμή
β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας

Προτεινόμενη λύση

α)



Αν ΑΒΓ είναι μία από τις παράπλευρες έδρες της πυραμίδας και ΑΔ το απόστημα αυτής, τότε, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 =$
$= 6^2 + 4^2 = 52$

άρα $AB = \sqrt{52}$ m

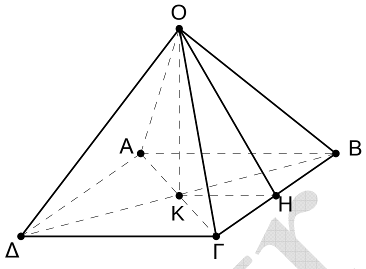
β)

$E_{\text{παράπλευρης}} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) $= \frac{1}{2} 5 \cdot 8 \cdot 6 = 120 \text{ m}^2$

3.

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 10 m και απόστημα 12 m.
Να βρείτε **α)** Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας
β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας
γ) Τον όγκο της πυραμίδας

Προτεινόμενη λύση



α)

$E_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) =

$= \frac{1}{2} 4 \cdot 10 \cdot 12 = 240 \text{ m}^2$

β)

$E_{βάσης} = 10^2 = 100 \text{ m}^2$

$E_{ολικό} = E_π + E_β = 240 + 100 = 340 \text{m}^2$

γ)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΗ έχουμε ότι $OK^2 = OH^2 - KH^2 =$

$= 12^2 - 5^2 =$

$= 144 - 25 =$

$= 119$ άρα $OK = \sqrt{119}$

Ο όγκος V είναι $V = \frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) =

$= \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119}$

$= \frac{100\sqrt{119}}{3} \text{m}^3$

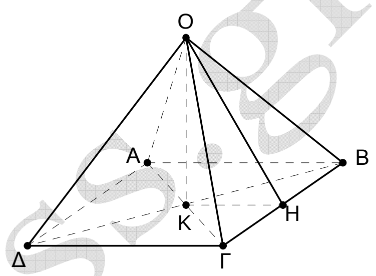
4.

Τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα αναφέρονται σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Να τον συμπληρώσετε.

Ύψος	$\sqrt{84}$ cm	8 mm	1000 cm
Πλευρά βάσης	8cm	120 mm	10 m
Απόστημα	1dm	$\sqrt{3664}$ mm	120 dm
$E_{παράπλευρης}$	160 cm^2	$240\sqrt{3664}$ mm^2	240 m^2
Όγκος	$\frac{64\sqrt{84}}{3}$ cm^3	38,4cm^3	$\frac{1000}{3}$ m^3

Προτεινόμενη λύση

1η στήλη



1dm = 10cm

Όπως στην άσκηση (3) βρίσκουμε ότι

Ύψος ΟΚ = $\sqrt{84}$ cm

$E_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) =

$= \frac{1}{2} 4 \cdot 8 \cdot 10 = 160$ cm^2

Όγκος = $\frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) = $\frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot \sqrt{84} = \frac{64\sqrt{84}}{3}$ cm^3 .

2η στήλη

38,4cm^3 = 38400 mm^3

$E_{βάσης} = 120^2 = 14400$ mm^2

Όγκος = $\frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) άρα $38400 = \frac{1}{3} \cdot 14400 \cdot υ$ άρα υ = 8mm

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΗ της άσκησης (3) έχουμε ότι

$ΟΗ^2 = ΟΚ^2 + ΚΗ^2 = 8^2 + 60^2 = 64 + 3600 = 3664$ άρα ΟΗ = $\sqrt{3664}$ mm

Οπότε $E_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) =

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 120 \cdot \sqrt{3664} = 240\sqrt{3664}$ mm^2

3η στήλη

1000cm = 10m , 120dm = 12m

Έστω x η πλευρά της βάσης.

Ο τύπος $E_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα)

δίνει $240 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot 12$ απ' όπου x = 10 m

$V = \frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) = $\frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 10 = \frac{1000}{3}$ m^3

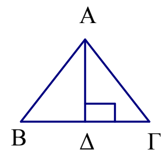
Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω. Τα κόκκινα είναι τα στοιχεία που λείπουν.

5.

Κανονική οκταγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8 cm και παράπλευρη ακμή 12 cm. Να βρείτε **α)** το απόστημα
β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας

Προτεινόμενη λύση

α)



Αν ΑΒΓ είναι μία από τις παράπλευρες έδρες της πυραμίδας και ΑΔ το απόστημα αυτής, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 – ΒΔ^2 =$
$= 12^2 – 4^2 =$
$=128$ άρα $ΑΔ = \sqrt{128}$ cm

β)

$Ε_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) =

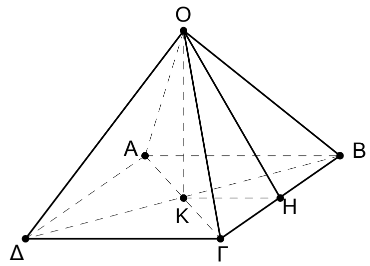
$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sqrt{128} = 32\sqrt{128}$ cm^2

6.

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 16 cm και παράπλευρη ακμή 17 cm. Να βρείτε **α)** το ύψος της πυραμίδας
β) τον όγκο της πυραμίδας

Προτεινόμενη λύση

α)



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΗ έχουμε
$ΟΗ^2 = ΟΒ^2 – ΒΗ^2 =$
$= 17^2 – 8^2 =$
$= 225$ άρα $ΟΗ = 15$
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΗ έχουμε
$ΟΚ^2 = ΟΗ^2 – ΚΗ^2 =$
$= 15^2 – 8^2 =$
$= 161$ άρα $ΟΚ = \sqrt{161}$ cm

β)

Ο όγκος V της πυραμίδας είναι

$$V = \frac{1}{3}(\text{ εμβαδόν βάσης }) \cdot (\text{ύψος}) = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \sqrt{161} = \frac{256\sqrt{161}}{3} \ m^3$$

7.

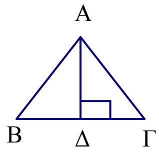
Κανονικού τετραέδρου όλες οι ακμές είναι ίσες με 5cm η κάθε μία.

α) Να βρείτε την ολική επιφάνεια του τετράεδρου.

β) Αν ο όγκος είναι 4,1 cm^3, να βρείτε το ύψος του τετραέδρου.

Προτεινόμενη λύση

α)



Αν ΑΒΓ είναι μία από τις έδρες του τετραέδρου και ΑΔ το απόστημα αυτής, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 =$

$$= 5^2 - 2{,}5^2 =$$
$$= 18{,}75$$

άρα $ΑΔ = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$cm

Το εμβαδόν Ε της έδρας είναι $Ε = \dfrac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}825 \ cm^2$

και επειδή όλες οι έδρες είναι ίσες, η ολική επιφάνεια είναι $Ε_{ολικό} = 4 \cdot 10{,}825 =$

$$= 43{,}3 cm^2$$

β)

Ο τύπος $V = \dfrac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) δίνει

$4{,}1 = \dfrac{1}{3} 10{,}825 \cdot υ$ απ' όπου $υ \approx 1{,}14$ cm

8.

Κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 12cm και παράπλευρη ακμή 10 cm. Να βρείτε **α)** το απόστημα της πυραμίδας

β) το $Ε_{παράπλευρης}$

Προτεινόμενη λύση

α)

Όπως στην άσκηση (7), το απόστημα ΑΔ είναι ΑΔ = 8cm

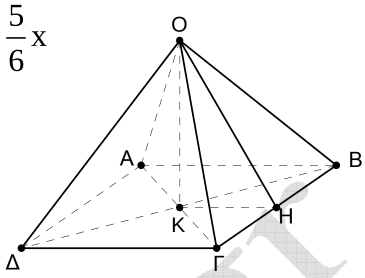
β)

$Ε_{παράπλευρης} = \dfrac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) $= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot 8 = 288 cm^2$

9.

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα ίσο με τα $\frac{5}{6}$ της πλευράς της βάσης και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι $384cm^2$. Να βρείτε την πλευρά της βάσης και τον όγκο της πυραμίδας.

Προτεινόμενη λύση



Αν x είναι η πλευρά της βάσης τότε το απόστημα είναι $\frac{5}{6}x$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΗ έχουμε

$$OK^2 = OH^2 - KH^2 = \left(\frac{5}{6}x\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{36}x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{16}{36}x^2$$

Άρα $OK = \frac{4}{6}x$

$E_{βάσης} = x^2$ και $E_{παράπλευρο} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης) · (απόστημα) =

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \frac{5}{6}x = \frac{5}{3}x^2$$

$E_{\ ολικό} = \frac{5}{3}x^2 + x^2 = \frac{8}{3}x^2$ και από την υπόθεση $384 = \frac{8}{3}x^2$ άρα

$x^2 = 144$

$x = 12cm$

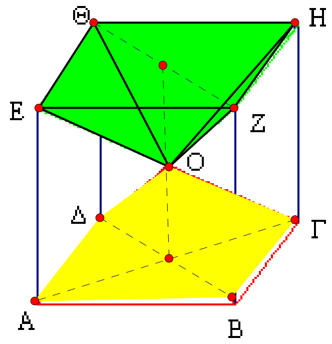
Οπότε ύψος $OK = \frac{4}{6} \cdot 12 = 8cm$

Ο όγκος V της πυραμίδας είναι $V = \frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης)·(ύψος) = $\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = 384cm^3$

10 .

Από τον διπλανό κύβο ακμής 10cm αφαιρέσαμε τις δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔ και ΟΕΖΗΘ , όπου Ο το μέσο του ΚΛ. Να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που έμεινε.

Προτεινόμενη λύση



Ο όγκος V_π κάθε μίας πυραμίδας που αφαιρέσαμε

είναι $V_\pi = \frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης) · (ύψος) =

$= \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5 = \frac{500}{3}\ \text{cm}^3$

Ο όγκος V_κ του κύβου είναι $V_\kappa = 10^3 = 1000\ \text{cm}^3$

Ο όγκος V_υ του στερεού που μένει μετά την

αφαίρεση είναι $V_\upsilon = 1000 - 2 \cdot \frac{500}{3} = \frac{2000}{3}\ \text{cm}^3$

Η επιφάνεια του στερεού είναι ίση με το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων γύρω γύρω εδρών του κύβου συν το εμβαδόν του εσωτερικού του κύβου το οποίο είναι ίσο με το εμβαδό των δύο παραπλεύρων εδρών των πυραμίδων που αφαιρέσαμε.

$E_{\text{τεσσάρων εδρών του κύβου}} = 4 \cdot 102 = 400\ \text{cm}^2$

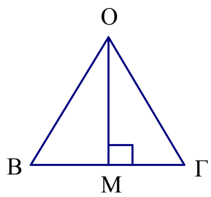
Κάθε παράπλευρη ακμή μιας πυραμίδας που αφαιρέσαμε είναι ίση με το μισό της διαγωνίου του κύβου .

Επειδή η διαγώνιος δ του κύβου είναι ίση με $\delta = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

(δες την άσκηση 11 του 4.2) η παράπλευρη ακμή είναι ίση με $\frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Αν ΟΜ είναι το απόστημα της παράπλευρης έδρας ΟΒΓ

Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ έχουμε ότι



$OM^2 = OB^2 - BM^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 5^2 = 50$ άρα

$OM = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ τότε

$E_{\text{παράπλευρης πυραμίδας}} = \frac{1}{2}$(περίμετρος βάσης)·(απόστημα) =

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 100\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

Το εσωτερικό του κύβου έχει εμβαδόν $2 \cdot 100\sqrt{2} = 200\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

Τελικά η επιφάνεια του στερεού που απομένει έχει εμβαδόν

$E_{\sigma\tau} = 400 + 200\sqrt{2}\ \text{cm}^2$